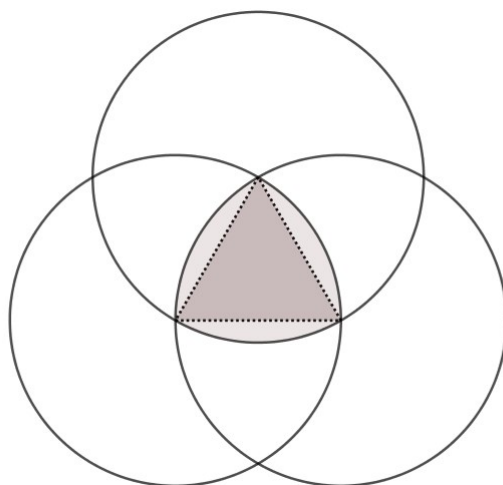


Objets convexes de largeur constante et Théorème de Blaschke-Lebesgue

HENRY Etienne - M1 PMG
Université de Bourgogne
Encadrant de ce mémoire : M. Xavier DUPUIS

Année universitaire 2017-2018

Présentation



Les mathématiciens du XIXe siècle, parmi lesquels Lebesgue et Blaschke, ont travaillé sur les corps et les solides de largeur constante en soulevant un certain nombre de questions auxquelles ils ont tenté de répondre avec les outils mathématiques alors à leur disposition. En 1875, Franz Reuleaux, ingénieur allemand, présente un corps convexe de largeur constante qui s'avère être le corps de largeur constante du plan d'aire minimale. Ce résultat est actuellement connu sous le nom de Théorème de Blaschke-Lebesgue.

Dans une première partie, on introduit les outils nécessaires à l'étude de ces objets dans le cas du plan. Une seconde partie formule une approche plus moderne du Théorème de Blaschke-Lebesgue avec les outils du contrôle optimal. La dernière partie de ce travail présente en guise de conclusion quelques questions connexes ouvertes ou récemment résolues.

Les résultats présentés dans ce travail sont essentiellement basés sur la thèse de doctorat de T. Bayen (voir [1]) qui a également eu la gentillesse lors d'une rencontre de me ré-expliquer certains passages de sa démonstration. Merci à lui.

Table des matières

1	Paramétrage et propriétés d'un corps convexe de largeur constante du plan	7
1.1	Fonction d'appui d'un convexe	7
1.2	Régularité de la fonction d'appui et caractérisation de la largeur constante	10
1.2.1	Stricte convexité	10
1.2.2	Corps convexes de largeur constante	15
1.3	Rayon de courbure d'un corps convexe du plan de largeur constante	18
1.4	Aire et périmètre des corps convexes	18
2	Théorème de Blaschke-Lebesgue et contrôle optimal	21
2.1	Formulation en un problème de contrôle optimal	21
2.1.1	Le contrôle optimal et le Principe du Maximum	21
2.1.2	Réécriture du problème de minimisation de l'aire	22
2.1.3	Existence de solutions	23
2.2	Résolution à l'aide du principe du maximum de Pontryagin	24
2.2.1	La constante p_0 est non nulle : pas de trajectoires anormales	25
2.2.2	Les trajectoires extrémales du système ne comportent pas d'arc singulier	26
2.2.3	Il y a un nombre fini de switching points dans $[0, \pi]$	27
2.2.4	Les <i>switching points</i> sont équidistants	27
2.2.5	Identification du minimiseur : le triangle de Reuleaux.	28
3	Généralisation à $\mathbb{R}^3$, conjecture de Meissner et questions liées	31
3.1	Corps d'épaisseur constante de volume minimal	31
3.2	Rotors	32
3.3	Courbes implicites polynômiales de largeur constante	33
A	Annexes	35
A.1	Absolue continuité	35
A.2	Topologies faible et faible *	36

1 | Paramétrage et propriétés d'un corps convexe de largeur constante du plan

Dans tout le mémoire, $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on supposera l'origine à l'intérieur des convexes considérés. On donnera dans cette première partie un cadre et des outils qui permettront dans un second temps d'introduire le Théorème de Blaschke-Lebesgue comme un problème de contrôle optimal.

Définition 1.0.1. Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)x + \lambda y \in C.$$

Ceci s'écrit aussi $[x, y] \subset C$. On parlera de stricte convexité si $]x, y[$ n'intersecte pas la frontière ∂C , c'est à dire qu'on a de plus

$$\forall x, y \in \partial C, \forall \lambda \in]0, 1[, (1 - \lambda)x + \lambda y \in \overset{\circ}{C}.$$

Définition 1.0.2. On appellera **corps convexe** un ensemble compact convexe de $\mathbb{R}^n$.

1.1 Fonction d'appui d'un convexe

La fonction que l'on définit dans cette section est l'outil fondamental pour aborder les corps convexes du plan en formalisant la notion de largeur.

Définition 1.1.1. Fonction d'appui d'un convexe. On définit la fonction d'appui d'un convexe $C \subset \mathbb{R}^n$ par :

$$\begin{aligned} \sigma_C : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ v &\mapsto \sup\{\langle x, v \rangle \mid x \in C\} \end{aligned}$$

Proposition 1.1.1. Soient $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ des convexes non vides. Alors

1. $\overline{C_1} \subset \overline{C_2} \Leftrightarrow \sigma_{C_1} \leq \sigma_{C_2}$
2. $\sigma_{C_1+C_2} = \sigma_{C_1} + \sigma_{C_2}$

Proposition 1.1.2. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe non vide et σ_C sa fonction d'appui. Alors

1. σ_C est positivement homogène
2. σ_C est une fonction convexe
3. σ_C est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ si C est compact.

Démonstration. 1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $d \in \mathbb{R}^n$.

Alors $\sigma_C(\lambda d) = \sup\{\lambda \langle x, d \rangle \mid x \in C\} = \lambda \sup\{\langle x, d \rangle \mid x \in C\} = \lambda \sigma_C(d)$ d'où la positive-homogénéité.

2. Soient $t \in [0, 1]$ et $d, y \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\begin{aligned}\sigma_C(td + (1-t)y) &= \sup\{\langle x, td + (1-t)y \rangle \mid x \in C\} = \sup\{t\langle x, d \rangle + (1-t)\langle x, y \rangle \mid x \in C\} \\ &\leq t \sup\{\langle x, d \rangle \mid x \in C\} + (1-t) \sup\{\langle x, y \rangle \mid x \in C\} = t\sigma_C(d) + (1-t)\sigma_C(y)\end{aligned}$$

D'où convexité.

3. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\sigma_C(d)| = \left| \sup_{c \in C} \langle c, d \rangle \right| \leq \sup_{c \in C} \|c\| \cdot \|d\|$$

Comme C est compact, on note $M = \sup_{c \in C} \|c\|$ alors

$$|\sigma_C(d)| \leq M \cdot \|d\|$$

□

Définition 1.1.2. *Fonction indicatrice d'un convexe. Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$. On définit la fonction indicatrice de C par*

$$i_C : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, +\infty\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

On remarque que C est convexe si et seulement si i_C est une fonction convexe, et que i_C caractérise complètement le convexe C .

L'outil que l'on présente ensuite est une transformation classique en Analyse Convexe qui ne sera pas étudiée en détail ici mais qui permettra de rapprocher l'indicatrice d'un convexe et sa fonction d'appui.

Définition 1.1.3. *Transformée de Legendre-Fenchel.*

Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}^n$. On définit la conjuguée ou transformée de Legendre-Fenchel de f par

$$f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$s \mapsto f^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle s, x \rangle - f(x)\}$$

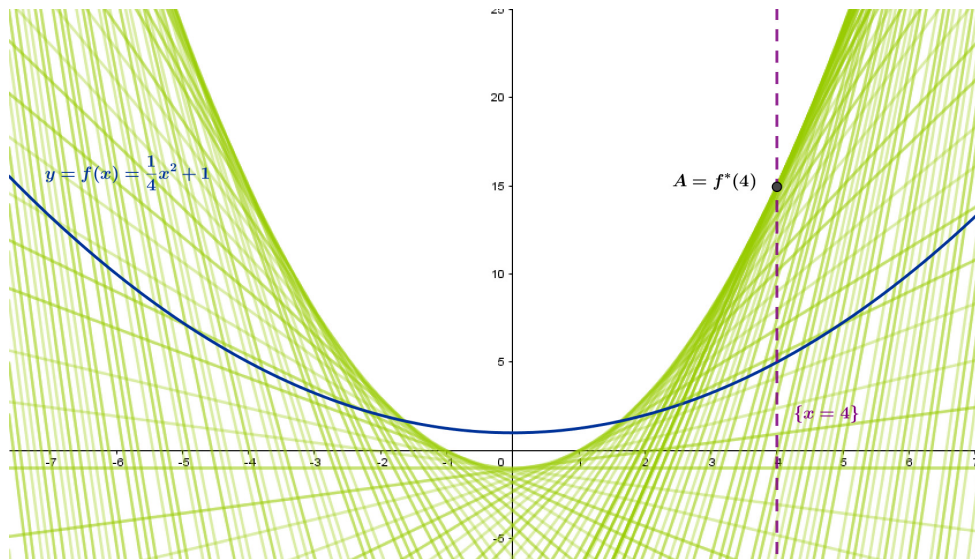


FIGURE 1.1 – Illustration de la transformée de Legendre-Fenchel sur une fonction convexe de $\mathbb{R}$.

On voudrait à présent étudier la possibilité d'une correspondance fonction d'appui $\leftrightarrow$ fonction indicatrice qui établirait sans effort que la fonction d'appui d'un convexe le caractérise complètement.

Proposition 1.1.3. Si i_C est la fonction indicatrice d'un convexe C , alors i_C^* est la fonction d'appui du convexe C . Si de plus C est fermé dans $\mathbb{R}^n$, la conjugué de sa fonction d'appui est sa fonction indicatrice.

Démonstration. La première affirmation est immédiate, car ici $\langle s, x \rangle - i_C(x) = \langle s, x \rangle$ si $x \in C$ et $\langle s, x \rangle - i_C(x) = -\infty$ sinon. Pour la réciproque on écrit simplement

$$\begin{aligned}\sigma^*(s) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle s, x \rangle - \sigma(x) \} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle s, x \rangle - \sup_{y \in C} \langle x, y \rangle \} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle s, x \rangle + \inf_{y \in C} \langle x, -y \rangle \} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \inf_{y \in C} \langle x, s - y \rangle\end{aligned}$$

D'abord, si $s \in C$, alors en prenant $y = s$ on a $\inf_{y \in C} \langle x, s - y \rangle \leq 0$, ce quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$ donc $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \inf_{y \in C} \langle x, s - y \rangle \leq 0$ et on a égalité pour $x = 0$. Si $s \notin C$, soit y un projeté de s sur C . Un tel élément existe bien car C est convexe et fermé. Alors en prenant $x = -(s - y) \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle x, s - y \rangle < 0$ donc $\inf_{y \in C} \langle x, s - y \rangle < 0$ pour un certain $x \in \mathbb{R}^n$, alors $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \inf_{y \in C} \langle x, s - y \rangle = +\infty$ en utilisant la linéarité du produit scalaire selon x . $\square$

Enfin, on cherche pour finir à identifier, parmi les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, celles qui sont les fonctions d'appui d'un convexe.

Proposition 1.1.4. Caractérisation des fonctions d'appui.

Toute fonction σ définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ satisfaisant

1. $\sigma(0) = 0$,
2. $\forall v \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \sigma(\lambda v) = \lambda \sigma(v)$ (Homogénéité positive)
3. $\forall v, u \in \mathbb{R}^n, \sigma(u + v) \leq \sigma(u) + \sigma(v)$ (Sous-additivité)

est la fonction d'appui d'un convexe.

Cette propriété est citée dans [1], et dans [6] où elle est démontrée. Nous l'admettrons dans ce mémoire.

Ce qui précède, en particulier l'homogénéité positive, permet de considérer la restriction de la fonction d'appui à la sphère unité et même dans le cas de $\mathbb{R}^2$ d'en donner une version paramétrée.

Définition 1.1.4. Fonction d'appui paramétrée, restriction à la sphère unité.

Soit C un corps convexe, alors on peut considérer

$$\begin{aligned}h_C : \mathbb{S}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto h_C(v)\end{aligned}$$

la restriction sur la sphère unité, qui caractérise complètement la fonction d'appui. Dans le cas $\mathbb{R}^2$ on voit plutôt h_C comme une fonction définie sur $[0, 2\pi]$ via le paramétrage usuel du cercle unité :

$$\begin{aligned}h_C : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\mapsto h_C(\cos(\theta), \sin(\theta))\end{aligned}$$

Dans la suite, on écrira souvent h pour h_C en l'absence de confusion possible. Considéré sous cette forme, il s'agit dans le cas de $\mathbb{R}^2$ de la distance de l'origine à la droite d'appui de normale $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, une notion géométrique très facile à représenter :

Exemple. Fonction d'appui d'un polygone convexe. Soit C un polygone convexe défini comme intersection d'une collection de demi-plans :

$$C = \bigcap_{j=1}^n E(\theta_j)$$

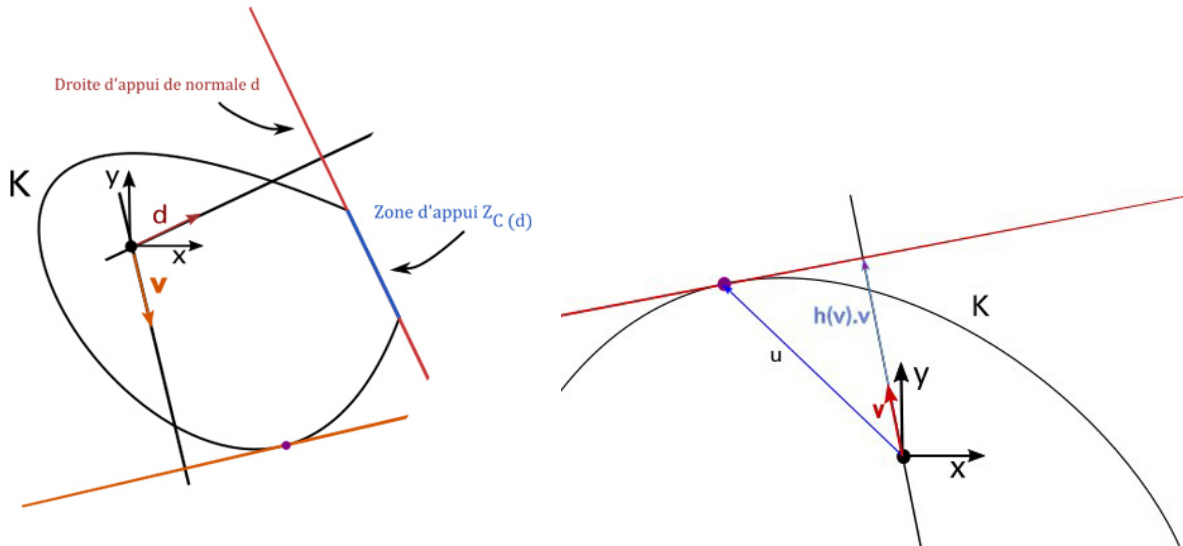


FIGURE 1.2 – Représentation de la droite d'appui. Grâce au second schéma, on se convainc aisément que u maximise $\sup\{\langle x, v \rangle \mid x \in C\}$ et qu'alors $h(v)$ représente bien la distance de l'origine à la droite d'appui.

où on définit après avoir fixé des constantes $p_1, \dots, p_n > 0$ et $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_j \leq \theta_{j+1} \leq \dots \leq 2\pi$:

$$E(\theta_j) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cos(\theta_j) + y \sin(\theta_j) \leq p_j\}$$

Pour que C soit bien un polygone convexe, on impose $n \leq 3$, $\theta_n - \theta_1 > \pi$, $\theta_{j+1} - \theta_j < \pi$ pour $j = 1, \dots, n-1$. Alors la fonction d'appui de C vaut pour $\theta \in [\theta_j, \theta_{j+1}]$:

$$h(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta_{j+1} - \theta_j)} [p_{j+1} \sin(\theta - \theta_j) + p_j \sin(\theta_{j+1} - \theta)]$$

avec $\theta_{n+1} := \theta_1 + 2\pi$.

En effet, soit $\theta \in [\theta_j, \theta_{j+1}]$, alors la zone d'appui $Z_C(\theta)$ est nécessairement le sommet obtenu par intersection des faces de normales $(\cos(\theta_j), \sin(\theta_j))$ et $(\cos(\theta_{j+1}), \sin(\theta_{j+1}))$. Grâce à l'expression des droites d'appui, on obtient que ce sommet a pour coordonnées

$$\begin{cases} x = \frac{-\sin(\theta_j)p_{j+1} + \sin(\theta_{j+1})p_j}{\sin(\theta_{j+1} - \theta_j)} \\ y = \frac{\cos(\theta_j)p_{j+1} - \cos(\theta_{j+1})p_j}{\sin(\theta_{j+1} - \theta_j)} \end{cases}$$

Alors

$$h(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \cdot (x, y)$$

d'où le résultat.

1.2 Régularité de la fonction d'appui et caractérisation de la largeur constante

1.2.1 Stricte convexité

Le théorème clé de cette section relie la stricte convexité d'un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ et la régularité de sa fonction d'appui.

Théorème 1.2.1. Soit C un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ et h sa fonction d'appui. Alors C est strictement convexe si et seulement si $h \in C^1$.

Pour le démontrer, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.2.1. Une fonction convexe sur un domaine convexe de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ admet des dérivées directionnelles (orientées) selon toute direction, de plus elles sont sous-additives et positivement homogènes. En particulier, toute fonction convexe sur $\mathbb{R}$ admet des dérivées à gauche et à droite en tout point, qui coïncident presque partout.

Démonstration. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un domaine convexe. On rappelle qu'on appelle ici dérivée directionnelle de $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ en x de direction $v \in \mathbb{R}^n$ la limite, si elle existe :

$$f'(x, v) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon}$$

D'abord on remarque que $\varepsilon \mapsto \frac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon}$ est croissante pour f convexe. Soient $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, avec $x + \varepsilon_2 v \in E$. Donc $x + \varepsilon_1 v \in E$ et $x + \varepsilon_1 v = (1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})x + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(x + \varepsilon_2 v)$. Alors avec la convexité de f ,

$$f(x + \varepsilon_1 v) \leq (1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})f(x) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}f(x + \varepsilon_2 v)$$

donc

$$\frac{f(x + \varepsilon_1 v) - f(x)}{\varepsilon_1} \leq \frac{f(x + \varepsilon_2 v) - f(x)}{\varepsilon_2}$$

Alors lorsque l'on considère la limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon}$, ce ratio est décroissant donc converge et $f'(x, v)$ existe, éventuellement $f'(x, v) = \pm\infty$. Pour l'homogénéité de $v \mapsto f'(x, v)$, il suffit de considérer

$$f'(x, \lambda v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \varepsilon \lambda v) - f(x)}{\varepsilon} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \alpha v) - f(x)}{\alpha/\lambda} = \lambda \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \alpha v) - f(x)}{\alpha}.$$

Enfin, pour obtenir la sous-additivité, on considère $u, v \in E$, et ε assez petit tel que $x + \varepsilon u, x + \varepsilon v \in E$. Alors en écrivant $x + \varepsilon(u+v) = \frac{x + 2\varepsilon u}{2} + \frac{x + 2\varepsilon v}{2}$ on obtient $f(x + \varepsilon(u+v)) \leq \frac{f(x + 2\varepsilon u)}{2} + \frac{f(x + 2\varepsilon v)}{2}$. En divisant par ε et en passant à la limite, on a bien $f'(x, u+v) \leq f'(x, u) + f'(x, v)$.

Dans le cas d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, l'existence des dérivées à gauche f'_g et à droite f'_d est immédiate avec ce qui précède. De plus, toute fonction f convexe sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ respecte l'inégalité suivante connue sous le nom d'inégalité des trois pentes :

$$\forall a, b, x \in I, (a < x < b) \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

Il vient alors, pour $a < b$, $f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq f'_g(b)$. Donc la fonction f'_g est croissante, et discontinue aux points où elle ne coïncide pas avec f'_d . Une fonction croissante ayant un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité, on a le résultat voulu. $\square$

Voici à présent la preuve du théorème.

Démonstration. D'abord, si C est strictement convexe, en admettant qu'une fonction convexe différentiable au voisinage d'un point est continument différentiable au voisinage de ce point¹, il suffit de démontrer que h est différentiable en tout point. Pour tout x unitaire on note H_x l'hyperplan d'appui à C de normale dirigée par x et Z_x la zone d'appui correspondante, c'est à dire $Z_x = H_x \cap \partial C = H_x \cap C$.

1. Voir [3] p. 246 Corollaire 25.5.1.

Par stricte convexité de C , Z_x est un singleton. Comme h est une application convexe, elle admet une dérivée partielle directionnelle selon toute direction $v \in \mathbb{R}^n$ (lemme 1.2.1). On notera :

$$h'(x, v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{h(x + \lambda v) - h(x)}{\lambda}$$

D'après le lemme qui précède, cette quantité existe pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ et $v \mapsto h'(x, v)$ est positivement homogène et sous-additive par rapport à v . De plus, les ratios sont bornés car h est lipschitzienne par compacité de C (propriété 1.1.2) donc h' est bornée. Alors c'est la fonction d'appui d'un convexe (propriété 1.1.4). On notera ce convexe C' . Par ailleurs, par sous-additivité et homogénéité positive de h :

$$h'(x, v) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{h(x + \lambda v) - h(x)}{\lambda} \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{h(x) + \lambda h(v) - h(x)}{\lambda} = h(v)$$

Ce pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, donc $C' \subset C$. Puis si $v \in C'$, alors $\langle v, x \rangle \leq h(x)$ et $\langle v, -x \rangle \leq h'(x, -x)$. Et

$$h'(x, -x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{h(x - \lambda x) - h(x)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{h(x)(1 - \lambda) - h(x)}{\lambda} = -h(x)$$

alors il en découle $h(x) = \langle v, x \rangle$. Finalement $v \in Z_x$ et Z_x est un singleton donc $C' = Z_x$.

Les dérivées partielles de h sont continues par rapport à la direction v , pour le voir on va montrer que $v \mapsto h'(x, v)$ est linéaire. On sait déjà qu'elle est sous-linéaire (sous-additive et positivement homogène) il suffit donc d'utiliser le fait suivant ² :

Lemme. Une fonction sous-linéaire $g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est linéaire si et seulement si elle est partout finie et si $g(\omega) = -g(-\omega)$, $\forall \omega \in E$.

Démonstration du lemme. Par sous-linéarité de g , avec $\omega, \nu \in E$:

$$g(\omega + \nu) \leq g(\omega) + g(\nu)$$

$$g(-(\omega + \nu)) \leq g(-\omega) + g(-\nu) = -g(\omega) - g(\nu)$$

en utilisant l'hypothèse. Alors

$$g(\omega) + g(\nu) \leq -g(-(\omega + \nu)) = g(\omega + \nu) \leq g(\omega) + g(\nu)$$

Donc g est additive. De plus, l'homogénéité positive et l'hypothèse permettent de conclure que g est linéaire.

Pour montrer $h'(x, v) = -h'(x, -v)$, comme $C' = z$ d'après ce qui précède, on a

$$h_{C'}(v) = \langle z, v \rangle = h'(x, v)$$

donc on a bien $h'(x, v) = -h'(x, -v)$ d'où le résultat. Finalement $v \mapsto h'(x, v)$ est linéaire sur un espace de dimension finie donc continue.

Pour la réciproque, par l'absurde : supposons $h \in C^1$ et qu'il existe $x, y \in \partial C$ tels que $[x, y] \subset \partial C$. On notera $x_t = tx + (1 - t)y$ un point du segment $[x, y]$. Soit v_0 une direction orthogonale à $[x, y]$, on a $[x, y] \subset H_{v_0}$ donc $x_t.v_0 = h(v_0)$. Si on prend à présent v non orthogonal à v_0 (et non colinéaire) et que l'on pose pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$u = v_0 + \varepsilon v$$

Toujours par définition de la fonction d'appui il vient

$$x_t.u = h(u)$$

En soustrayant on a

$$\varepsilon x_t.v \leq h(u) - h(v_0)$$

Puis en faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $x_t.v \leq h'(v_0, v)$ et de même pour $\varepsilon \rightarrow 0^-$ on a $h'(v_0, v) \leq x_t.v$, d'où égalité. Or $x_t.v$ varie avec $t \in [0, 1]$ alors que comme h est C^1 , elle admet une dérivée directionnelle bien définie selon v en v_0 , $h'(v_0, v)$. D'où contradiction. $\square$

2. Issu de [8]

Le paramétrage qui fait l'objet du théorème suivant est un élément essentiel pour la suite.

Théorème 1.2.2. Soit C un corps strictement convexe du plan de fonction d'appui paramétrée h . Un paramétrage de ∂C sur $[0, 2\pi]$ est donné par

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} x(\theta) &= h(\theta) \cos(\theta) - h'(\theta) \sin(\theta) \\ y(\theta) &= h(\theta) \sin(\theta) + h'(\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

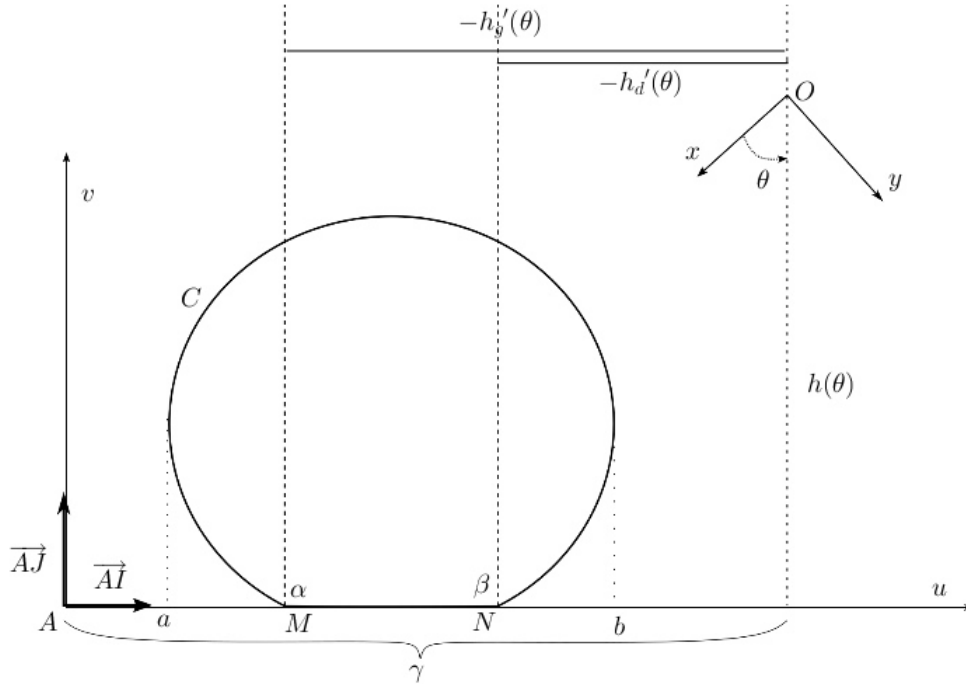
Pour établir ce résultat, on utilise un théorème présenté comme un résultat intermédiaire dans l'article [4], qui relie la dérivée de la fonction d'appui à des quantités géométriques.

Théorème 1.2.3. Si C est un convexe compact du plan, les dérivées à droite et à gauche h'_d et h'_g de la fonction d'appui paramétrée h existent partout et sont continues respectivement à droite et à gauche. De plus, si on se donne une base affine positive orthonormée de $\mathbb{R}^2$ $(A, \vec{AI}, \vec{AJ})$ telle que $A, I \in D_C(\theta)$ la droite d'appui et J est dans le demi-plan de frontière $D_C(\theta)$ contenant le convexe, alors la zone d'appui $Z_C(\theta) = [MN]$ est définie par :

$$\vec{MO} = -h'_g(\theta) \vec{AI} + h(\theta) \vec{AJ}$$

$$\vec{NO} = -h'_d(\theta) \vec{AI} + h(\theta) \vec{AJ}$$

Démonstration. Le schéma suivant, reproduit depuis [4], présente le contexte de la démonstration.



Pour cette démonstration, on notera (u, v) les coordonnées dans le repère affine (A, I, J) , c'est à dire qu'on note (u, v) un point B tel que $\vec{AB} = u\vec{AI} + v\vec{AJ}$. On introduit

$$[a, b] = \{u | \exists v, (u, v) \in C\}$$

le cas dégénéré $a = b$ est trivial et correspond au cas où C est un segment, orthogonal à $D_C(\theta)$. Ce cas peut être traité séparément. Supposons $a < b$. Si $u \in [a, b]$, on introduit les nombres $f(u), g(u)$ tels que

$$[f(u), g(u)] = \{v | (u, v) \in C\}.$$

Les fonctions f et g sont respectivement convexe et concave. En effet, soient $u, v \in [a, b]$, alors la droite affine reliant $(u, f(u))$ et $(v, f(v))$ a pour équation $\frac{f(v) - f(u)}{v - u}(t - u) + f(u)$ et par convexité de C , le segment de droite $[(u, f(u)), (v, f(v))] \subset C$. En particulier, soit $\lambda \in [0, 1]$, alors

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u}(\lambda u + (1 - \lambda)v - u) + f(u) = \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v) \in \{t | (\lambda u + (1 - \lambda)v, t) \in C\}$$

en vertu de quoi $f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$. La concavité de g s'obtient par la même méthode.

L'ensemble $\{u | f(u) = 0\}$ est un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ et non vide car il s'agit de la zone d'appui $Z_C(\theta)$. Notons $(\gamma, h(\theta))$ les coordonnées de l'origine O dans le système de coordonnées de $(A, \vec{AI}, \vec{AJ})$. Alors l'assertion du théorème se traduit par

$$\begin{cases} h'_d(\theta) = \beta - \gamma \\ h'_g(\theta) = \alpha - \gamma \end{cases}$$

La fonction f étant convexe sur $[a, b]$, elle admet une dérivée à droite f'^+ sur $[a, b]$, continue à droite, et une dérivée à gauche f'_g sur $]a, b]$, continue à gauche, et les deux dérivées coïncident presque partout (voir lemme 1.2.1). Soit à présent

$$m \in] \lim_{u \downarrow a} f'_g(u), \lim_{u \uparrow b} f'_d(u) [.$$

Alors comme f'_g et f'_d sont croissantes et $f'_g \leq f'_d$, il existe un intervalle $[u(m), u_1(m)]$ tel que

$$(u(m) \leq u \leq u_1(m)) \Rightarrow (f'_g(u) \leq m \leq f'_d(u)).$$

Supposons dans un premier temps $\beta < b$. Dans ce cas, $\lim_{u \uparrow b} f'_d(u) > 0$. En effet, si $\lim_{u \uparrow b} f'_d(u) = 0$, comme f'_d est croissante et $f'_d \geq 0$ sur $[\beta, b]$, on aurait $f'_d \sim 0$ sur $[\beta, b]$, alors f serait constante sur cet intervalle, ce qui contredit la définition de β comme borne de la zone d'appui.

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \tan \varepsilon < \lim_{u \uparrow b} f'_d(u)$, alors $P := (u(\tan \varepsilon), f(u(\tan \varepsilon))) \in D_C(\theta + \varepsilon)$. En effet, $P \in \partial C$ et P appartient aux tangentes en P à ∂C , qui sont de la forme $v = f(u(\tan \varepsilon)) + p(u - u(\tan \varepsilon))$ avec $p \in [f'_g(u(\tan \varepsilon)), f'_d(u(\tan \varepsilon))]$. Et par définition de $u(\cdot)$, $u(\tan \varepsilon) \in [f'_g(u(\tan \varepsilon)), f'_d(u(\tan \varepsilon))]$. Donc dans le repère $(A, \vec{AI}, \vec{AJ})$, P est sur la droite d'appui de pente $\tan(\varepsilon)$. Or cette droite est la droite d'appui $D(\theta + \varepsilon)$. Alors par l'équation de $D_C(\theta + \varepsilon)$ (en écrivant $\vec{OP} = (u - \gamma)\vec{AI} + (f(u) - h(\theta))\vec{AJ} = (u - \gamma)\vec{u}_\theta + (f(u) - h(\theta))\vec{v}_\theta$, où $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et v_θ complète u_θ en une base orthonormée positive) il vient :

$$[u(\tan \varepsilon) - \gamma] \sin(\varepsilon) + [h(\theta) - f(u(\tan \varepsilon))] \cos(\varepsilon) = h(\theta + \varepsilon)$$

Or $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\tan \varepsilon) = \beta$ et $\frac{f(u(\tan \varepsilon))}{\tan \varepsilon} \leq u(\tan \varepsilon) - \beta$. Il vient alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} f(u(\tan \varepsilon)) = 0$ puis

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [h(\theta + \varepsilon) - h(\theta)] = \beta - \gamma.$$

A présent, voyons le cas où $\beta = b$. A partir de l'équation de $D_C(\theta + \varepsilon)$ il vient

$$(\beta - \gamma) \sin(\varepsilon) + h(\theta) \cos(\varepsilon) = h(\theta + \varepsilon)$$

pour ε assez petit et le résultat en découle.

La deuxième égalité se montre sur le même principe.

□

Voyons à présent la preuve du paramétrage.

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour une direction $u = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ la droite d'appui est d'équation

$$D_\theta : \cos(\theta)X + \sin(\theta)Y = h(\theta).$$

Alors comme $h(\theta) = \sup\{\langle x, u \rangle \mid x \in C\}$ et que $x \mapsto \langle x, u \rangle$ est ici définie sur un compact, elle atteint son maximum en $(x(\theta), y(\theta)) \in \partial C \cap D_\theta$ (voir la figure 1.1). Finalement

$$\cos(\theta)x(\theta) + \sin(\theta)y(\theta) = h(\theta).$$

Par ailleurs avec le [théorème 1.2.3](#) précédent, et avec la stricte convexité, on a $M = N$ et comme $u = -\vec{AJ}$, $\vec{AI} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ il vient

$$\vec{ON} = h(\theta) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} + h'(\theta) \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

puis $\vec{ON} \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta)) = h'(\theta)$. d'où finalement les conditions

$$\begin{cases} \cos(\theta)x(\theta) + \sin(\theta)y(\theta) = h(\theta) \\ -\sin(\theta)x(\theta) + \cos(\theta)y(\theta) = h'(\theta) \end{cases}$$

qui donnent le résultat. □

1.2.2 Corps convexes de largeur constante

Définition 1.2.1. Soit C un corps convexe de $\mathbb{R}^n$, de fonction d'appui paramétrée h . On dira que C est de largeur constante l s'il existe $l \geq 0$ tel que

$$\forall v \in \mathbb{S}^{n-1}, h(v) + h(-v) = l.$$

Dans le cas du plan, cela s'écrit avec la fonction d'appui paramétrée introduite précédemment :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], h(\theta) + h(\theta + \pi) = l$$

Cette définition correspond à l'intuition, comme le montre le schéma suivant : il s'agit en fait d'un écartement constant entre les deux tangentes au convexe dans n'importe quelle direction.

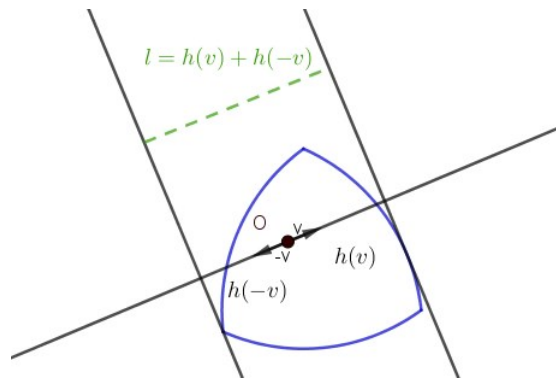


FIGURE 1.3 – Corps convexe de largeur constante (Triangle de Reuleaux) dans le plan.

Théorème 1.2.4. Un corps de largeur constante est strictement convexe.

Démonstration. Par l'absurde. Si que C est un corps de largeur constante et qu'il existe $x, y \in \partial C$ tels que $[x, y] \subset \partial C$; on note $x_t = tx + (1-t)y \in [x, y]$, H un hyperplan d'appui de C en x_t . Cet hyperplan contient $[x, y]$ et donc $[x, y] \subset Z_v$ où Z_v est la zone d'appui. On choisit v son vecteur normal. On a

$$h(v) = \langle x_t, v \rangle$$

Par ailleurs par définition de la fonction d'appui (et par compacité de C) il existe $z \in \partial C$ tel que

$$h(-v) = \langle -z, v \rangle$$

Alors comme C est de largeur constante, disons de largeur l , on a

$$l = h(v) + h(-v) = \langle x_t - z, v \rangle \leq \|x_t - z\| \cdot \|v\| = \|x_t - z\|$$

Cette dernière inégalité étant obtenue avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Par ailleurs montrons que $\|x_t - z\| \leq l$ par l'absurde : si $\|x_t - z\| > l$, soit $u = \frac{x_t - z}{\|x_t - z\|} \in \mathbb{S}^{n-1}$. Par définition de la fonction d'appui,

$$h(u) \geq \langle x_t, u \rangle = \langle x_t, \frac{x_t - z}{\|x_t - z\|} \rangle$$

$$h(-u) \geq \langle z, -u \rangle = \langle z, -\frac{x_t - z}{\|x_t - z\|} \rangle$$

Finalement on somme les inégalités et

$$l = h(u) + h(-u) \geq \langle x_t - z, u \rangle = \langle x_t - z, \frac{x_t - z}{\|x_t - z\|} \rangle = \frac{\|x_t - z\|^2}{\|x_t - z\|} = \|x_t - z\| > l$$

Donc on a une contradiction. Alors $\|x_t - z\| = l$ donc on a un cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x_t - z = \alpha v$ et en prenant le produit scalaire de l'égalité avec v on a $\alpha = l$ donc ce scalaire ne dépend pas de $t \in [0, 1]$. Finalement on a une contradiction car le vecteur x_t n'est pas constant. $\square$

La propriété suivante nous sera utile pour placer un repère bien choisi de notre plan euclidien dans la partie suivante.

Proposition 1.2.1. *Soit C un corps convexe de largeur constante 1, alors son diamètre vaut 1.*

Démonstration. Tout d'abord, on rappelle que $\text{diam}(C) = \sup\{\|x - y\|, x, y \in C\}$. Comme C est compact et que $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ est continue, le diamètre est réalisé par un couple de points (x, y) de C . Supposons que $x \notin \partial C$ ou $y \notin \partial C$, alors on considère l'intersection de la droite (x, y) avec ∂C , a et b les points d'intersection, alors par l'inclusion $[x, y] \subset [a, b]$ on a contradiction avec la maximalité de $\|x - y\|$. Finalement le diamètre est réalisé par des points de la frontière. Soit $x \in \partial C$, on reprend l'idée de la preuve précédente : il existe un hyperplan d'appui H en x de normale v . Alors $h(v) = \langle v, x \rangle$. Il existe aussi $x' \in \partial C$ tel que $h(-v) = -\langle x', v \rangle$. Finalement $1 = h(v) + h(-v) = \langle x - x', v \rangle$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient $\|x - x'\| \geq 1$. Et on a aussi montré dans la preuve de la [théorème 1.2.4](#) que :

$$\forall x, y \in C, \|x - y\| \leq 1$$

Alors l'égalité est atteinte et on a le résultat. $\square$

Proposition 1.2.2. *La fonction d'appui d'un corps convexe de largeur constante est de classe $C^{1,1}$ c'est à dire continument dérivable et de dérivée lipschitzienne.*

Démonstration. On fera ici la preuve en dimension 2. Soit C de largeur constante et h sa fonction d'appui. Par stricte convexité de C (voir [théorème 1.2.4](#)) on sait déjà que $h \in C^1$ (voir [théorème 1.2.1](#)). Alors il reste à voir que h' est lipschitzienne. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. Par définition de la fonction d'appui, on a si on note $u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$:

$$\forall \theta' \in [0, 2\pi], (x(\theta'), y(\theta')).u_\theta \leq h(\theta)$$

Utilisons le paramétrage issu de la [théorème 1.2.2](#), et on obtient en abrégant $\cos(\theta)$ en c_θ et $\sin(\theta)$ en s_θ :

$$c_\theta(h(\theta')c_{\theta'} - h'(\theta')s_{\theta'}) + s_\theta(h(\theta')s_{\theta'} + h'(\theta')c_{\theta'}) \leq h(\theta)$$

En développant et en simplifiant :

$$h(\theta') \cos(\theta' - \theta) + h'(\theta') \sin(\theta' - \theta) \leq h(\theta)$$

Et finalement $h'(\theta') \sin(\theta' - \theta) \leq h(\theta) - h(\theta') \cos(\theta' - \theta)$ On peut toujours intervertir θ et θ' , alors $h'(\theta) \sin(\theta - \theta') \leq h(\theta') - h(\theta) \cos(\theta - \theta')$.

Puis en sommant les inégalités

$$(h'(\theta') - h'(\theta)) \sin(\theta - \theta') \leq (h(\theta') + h(\theta))(1 - \cos(\theta - \theta')).$$

A présent, on utilise le fait que C soit de largeur constante, i.e. $h(\theta) + h(\theta + \pi) = l$ où l donc on remarque que $h'(\theta + \pi) = -h'(\theta)$ en dérivant l'égalité. Alors en substituant dans la dernière inégalité θ en $\theta + \pi$ et θ' en $\theta' + \pi$ on obtient

$$(h'(\theta) - h'(\theta')) \sin(\theta - \theta') \leq (2l - h(\theta) - h(\theta'))(1 - \cos(\theta - \theta'))$$

Comme on suppose toujours l'origine à l'intérieur de C , h est positive et majorée par l . Alors il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$|(h'(\theta') - h'(\theta)) \sin(\theta - \theta')| \leq M(1 - \cos(\theta - \theta'))$$

Alors si $|\theta - \theta'| \leq \frac{\pi}{2}$ on a

$$|h'(\theta') - h'(\theta)| \leq M \left| \tan \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right) \right|$$

Et comme $|\tan(x)| \leq \frac{4}{\pi}|x|$ sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ on a

$$|h'(\theta') - h'(\theta)| \leq M \frac{4}{\pi} |\theta - \theta'|$$

Sinon, quand on a $|\theta - \theta'| > \frac{\pi}{2}$ on utilise le fait que $h \in C^1$ alors $\|h\|_\infty$ existe :

$$|h'(\theta') - h'(\theta)| \leq 2\|h\|_\infty$$

$$\frac{2}{\pi} |\theta - \theta'| > 1$$

Alors en multipliant on a

$$|h'(\theta') - h'(\theta)| \leq \frac{4}{\pi} \|h'\|_\infty |\theta - \theta'|$$

D'où le résultat. □

Remarque. On peut désormais affirmer que h' est absolument continue, car elle est Lipschitzienne. Ceci nous permet de considérer sa dérivée, qui existe presque partout, et on a

$$\int_a^b h''(\theta) d\theta = h'(b) - h'(a).$$

Les résultats concernant l'absolue continuité qui interviendront dans la suite sont détaillés en annexe de ce mémoire.

Corollaire 1.2.1. Si C est un corps convexe du plan de fonction d'appui h , l'application

$$\rho = h + h''$$

existe presque-partout.

1.3 Rayon de courbure d'un corps convexe du plan de largeur constante

Dans la formulation du théorème de Blaschke-Lebesgue en problème de contrôle optimal, la positivité de l'application $\rho = h + h''$ joue un rôle essentiel. L'étude de cette condition est l'objet de cette section. Les résultats qui suivent sont issus d'un travail assez technique présenté par G. Letac dans [4].

Proposition 1.3.1. *Soit C un corps compact de fonction d'appui paramétrée h . Si h est $C^{1,1}$ (en particulier si C est de largeur constante), alors*

$$h + h'' \geq 0 \text{ p.p.}$$

Idée de preuve. On peut considérer $h + h''$ comme une densité de mesure et montrer que cela définit une mesure positive sur $[0, 2\pi]$. Pour un polygone convexe défini par

$$C = \bigcap_{j=1}^n E(\theta_j)$$

où on définit après avoir fixé des constantes $p_1, \dots, p_n > 0$ et $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_j \leq \theta_{j+1} \leq \dots \leq 2\pi$:

$$E(\theta_j) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cos(\theta_j) + y \sin(\theta_j) \leq p_j\}$$

il vient (au sens des distributions)

$$h'' + h = \sum_{j=1}^n m_j \delta_{\theta_j}$$

où m_j est la longueur du côté de normale θ_j , qui est bien une mesure positive.

En approximant le convexe C par une suite croissante de polygones convexes, des arguments de topologie, de géométrie et de convergence de mesures permettent de conclure.

La réciproque prend la forme suivante.

Proposition 1.3.2. *Soit $h \in C^{1,1}$, 2π -périodique et vérifiant*

$$h + h'' \geq 0.$$

Alors il existe un convexe compact du plan de fonction d'appui h .

Idée de preuve. On peut définir les demi-plans

$$E(\theta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \leq h(\theta)\},$$

et poser

$$C = \bigcap_{\theta \geq 0} E(\theta).$$

Il vient alors que C est un convexe compact du plan et que sa fonction d'appui est donnée par h . La preuve de ce dernier point est délicate et fait appel à des arguments d'analyse convexe et de théorie de la mesure.

Remarque. Si h est C^3 , alors $h + h''$ est le rayon de courbure classique de ∂C . On retrouve alors le résultat présenté dans [13].

1.4 Aire et périmètre des corps convexes

On donne ici les idées essentielles qui justifient les formules d'aire et de périmètres des convexes du plan que nous allons utiliser dans la suite. Ces résultats sont également établis en détail dans [4].

Concernant la formule de périmètre. Soit C un polygone convexe. Sa fonction d'appui, calculée en exemple dans la première partie, est C^2 par morceaux. Avec le paramétrage donné par [théorème 1.2.2](#), qui est alors C^1 par morceaux, on peut appliquer les formules usuelles de calcul de longueur pour les courbes rectifiables. Il vient

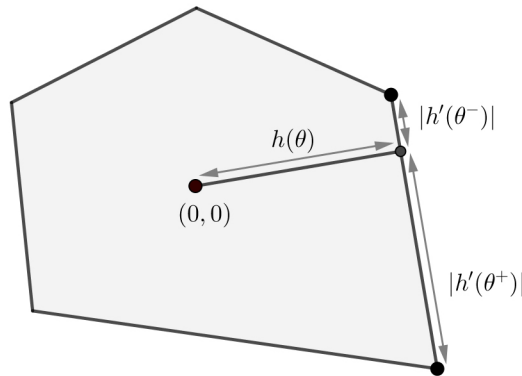
$$\mathcal{L}(\partial C) = \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta.$$

Pour étendre cette formule à tout convexe compact du plan C , on procède par approximation en considérant une suite croissante de polygones convexes $(C_n)_n$ telle que $C = \bigcup_{n \geq 0} C_n$. On a d'une part le périmètre de C_n qui converge vers celui de C , d'autre part $h_{C_n} \uparrow h$ et par le théorème de Beppo-Lévi, on a $\mathcal{L}(\partial C) = \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta$.

Concernant la formule d'aire. Dans le cas d'un polygone convexe C , la formule

$$\mathcal{A}(C) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\theta)(h(\theta) + h''(\theta)) d\theta$$

correspond géométriquement³ à la somme des triangles de base $Z_C(\theta_j)$ et de sommets $(0, 0)$.



Pour un convexe compact quelconque C du plan, on approche à nouveau C par une suite de polygones convexes $(C_n)_n$ comme précédemment. Le fait que $h_{C_n} \uparrow h$ et des arguments de convergence de mesure et permettent de passer à la limite et d'obtenir

$$\mathcal{A}(C) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\theta)(h(\theta) + h''(\theta)) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\theta) \rho(\theta) d\theta.$$

Le petit théorème suivant donne une contrainte sur le périmètre d'un corps convexe de largeur constante.

Théorème 1.4.1. Théorème de Barbier. *Le périmètre d'un corps convexe de largeur constante l est entièrement déterminé par sa largeur et vaut $l\pi$.*

Démonstration. Avec le travail précédent de généralisation des formules d'aire et périmètre, la preuve est immédiate : soit C un corps convexe de largeur constante l et h sa fonction d'appui, alors

$$\mathcal{L}(\partial C) = \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta = \int_0^\pi h(\theta) d\theta + \int_\pi^{2\pi} h(\theta) d\theta = \int_0^\pi (h(\theta) + h(\theta + \pi)) d\theta = \int_0^\pi l d\theta = l\pi$$

□

L'inégalité isopérimétrique peut s'appliquer à notre situation :

3. Voir le [théorème 1.2.3](#).

Théorème 1.4.2. *Inégalité isopérimétrique. Si S est une surface du plan d'aire A délimitée par une courbe fermée C de périmètre L , on a*

$$A \leq \frac{1}{4\pi} L^2$$

avec égalité si et seulement si L est un cercle.

Ce théorème figure comme un corollaire dans le travail de G. Letac [4].

Ceci signifie qu'à périmètre fixé, la surface d'aire maximale est le disque. Finalement comme les disques sont des corps convexes de largeur constante, on a immédiatement :

Corollaire 1.4.1. *Pour une largeur donnée l , le corps convexe de largeur constante l d'aire maximale est le disque de diamètre l .*

Le lemme suivant récapitule le travail effectué tout au long de cette première partie sous une forme plus adaptée à la formulation d'un problème de contrôle optimal.

Lemme 1.4.1. *Un corps convexe de largeur constante 1 du plan est la donnée d'une fonction $h : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{1,1}$ vérifiant*

$$\begin{cases} 0 \leq h + h'' \leq 1 \text{ là où } h'' \text{ existe} \\ h(0) = h(\pi) = \frac{1}{2} \\ h'(0) = h'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Démonstration. D'abord, si h est une fonction d'appui d'un corps convexe de largeur constante de largeur 1, alors elle est de classe $C^{1,1}$ d'après la [propriété 1.2.2](#), donc sa restriction à $[0, \pi]$ est $C^{1,1}$, elle est dérivable presque partout et la convexité implique $h + h'' \geq 0$. Avec la largeur constante, on a $h(\theta) + h(\theta + \pi) = 1$ donc en dérivant deux fois, là où h'' existe elle vérifie $h''(\theta) + h''(\theta + \pi) = 0$ et en sommant les deux égalités on a

$$\rho(\theta) + \rho(\theta + \pi) = (h(\theta) + h''(\theta)) + (h(\theta + \pi) + h''(\theta + \pi)) = 1$$

et donc $0 \leq \rho \leq 1$. Enfin, quitte à choisir le bon système de coordonnées, si on place le repère tel que l'origine soit le milieu d'un diamètre du convexe et que l'axe des abscisses coïncide avec le diamètre en question, avec la [propriété 1.2.1](#) et la [théorème 1.2.2](#) on a :

$$\begin{cases} x(0) = h(0) = \frac{1}{2} \\ y(0) = h'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(\pi) = -h(\pi) = -\frac{1}{2} \\ y(\pi) = -h'(\pi) = 0 \end{cases}$$

d'où les valeurs annoncées. Réciproquement, soit $\bar{h}$ une telle fonction définie sur $[0, \pi]$, alors on la prolonge en une fonction h , d'abord sur $[0, 2\pi]$ en posant :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \quad h(\theta) = \bar{h}(\theta)$$

$$\forall \theta \in [\pi, 2\pi], \quad h(\theta) = 1 - \bar{h}(\theta - \pi)$$

puis en prolongeant h en une fonction 2π -périodique sur $\mathbb{R}$. Grâce aux conditions imposées aux bords, $h \in C^{1,1}$ et comme $h'' + h \geq 0$ c'est la fonction d'appui paramétrée d'un corps convexe. Enfin par construction, $h(\theta) + h(\theta + \pi) = 1$ donc le corps convexe déterminé par h est de largeur constante égale à 1. $\square$

Dans la suite, on s'intéresse au problème de minimisation de l'aire : parmi les corps convexes de largeur constante fixée l , quel est celui d'aire minimale? Munis des outils introduits dans cette première partie, on formalise dans la partie suivante ce problème de minimisation en un problème de contrôle optimal.

2 | Théorème de Blaschke-Lebesgue et contrôle optimal

2.1 Formulation en un problème de contrôle optimal

2.1.1 Le contrôle optimal et le Principe du Maximum

Le contrôle optimal n'étant pas enseigné en filière MA/PMG à l'Université de Bourgogne, on présente ici le résultat qui sera utilisé. Ce passage restera peu développé et le théorème sera admis. Le contrôle optimal s'attache à déterminer les « trajectoires » permettant de passer d'un état à un autre et minimisant un « coût », cela au moyen d'une application servant de paramètre, le « contrôle », prenant ses valeurs dans un ensemble déterminé.¹

Théorème 2.1.1. Principe du Maximum de Pontryagin (PMP). On considère le système de contrôle dans $\mathbb{R}^n$:

$$x'(t) = f(x(t), u(t))$$

avec $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et où $u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$ est la variable de contrôle et $x \in Lip([0, T], \mathbb{R}^n)$ est la variable d'état. Un couple (x, u) satisfaisant la dynamique est appelé trajectoire. La trajectoire (x, u) est dite admissible si elle satisfait les contraintes $u(t) \in U$ p.p., $x(0) = m_0$, $x(T) = m_T$ où $U \subset \mathbb{R}^m$ est un ensemble fermé et $m_0, m_T \in \mathbb{R}^n$ sont des constantes fixées.

Par ailleurs on définit le coût d'une trajectoire (x, u) :

$$J(x, u) = \int_0^T \varphi(x(s), u(s)) ds$$

où $\varphi : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 . On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire minimisant J parmi les trajectoires admissibles. On définit le Hamiltonien du problème,

$$H(x, p, p_0, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + p_0 \varphi(x, u).$$

Les conditions d'optimalité sont les suivantes : si la trajectoire (x, u) est optimale, alors il existe $p \in Lip([0, T], \mathbb{R}^n)$ et $p_0 \leq 0$ tels que

$$p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), p_0, u(t))$$

et

$$H(x(t), p(t), p_0, u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), p(t), p_0, v) \text{ p.p. sur } [0, T].$$

De plus, $t \mapsto H(x(t), p(t), p_0, u(t))$ est constante presque-partout sur $[0, T]$.

1. Cette formulation est adaptée au problème qui nous occupe depuis celle proposée dans [9].

2.1.2 Réécriture du problème de minimisation de l'aire

Par des manipulations sur les expressions obtenues au cours de la partie 1, on reformule le problème de minimisation de l'aire en un problème de contrôle optimal sur lequel il sera aisé d'appliquer le Principe du Maximum de Pontryagin. Ici, il s'agit d'étudier²

$$\min_h \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(h + h''); \text{ avec } \begin{cases} 0 \leq h + h'' \leq 1 \text{ là où } h'' \text{ existe} \\ h(0) = h(\pi) = \frac{1}{2} \\ h'(0) = h'(\pi) = 0 \\ h(\theta) + h(\theta + \pi) = 1 \end{cases}$$

Par ailleurs avec $\rho(\theta) + \rho(\theta + \pi) = 1$, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(h) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\theta)\rho(\theta)d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi h(\theta)\rho(\theta)d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\pi h(\theta + \pi)\rho(\theta + \pi)d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi h(\theta)\rho(\theta)d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - h(\theta))(1 - \rho(\theta))d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [2h\rho - h - (h + h'')]d\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \int_0^\pi h(\theta)(\rho(\theta) - 1)d\theta \end{aligned}$$

car le terme en h'' ne contribue pas grâce à la condition $h'(0) = h'(\pi) = 0$. Si on pose à présent le changement de variables

$$\begin{cases} x_1 = 2(h - \frac{1}{2}) \\ u = 2(\rho - \frac{1}{2}) \end{cases}$$

et que l'on définit $J(x_1, u) := \int_0^\pi x_1 u$ on obtient :

$$\begin{aligned} J(x_1, u) &= \int_0^\pi x_1 u = 4 \int_0^\pi [h\rho - h/2 - \rho/2 + 1/4] = 4 \int_0^\pi h\rho - 4 \int_0^\pi h + \pi \\ &= 4 \int_0^\pi h(\rho - 1) + \pi = 4\mathcal{A}(h) - \pi \end{aligned}$$

Finalement $\mathcal{A}(h) = \frac{1}{4}J(x_1, u) + \frac{\pi}{4}$ et les conditions du [lemme 1.4.1](#) s'écrivent :

$$\begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ x_1(0) = x_1(\pi) = 0 \\ x'_1(0) = x'_1(\pi) = 0 \end{cases}$$

Minimiser l'aire revient à minimiser $J(x_1, u)$ sous ces contraintes. En résumé, la suite de cette partie est consacrée à la résolution du problème de contrôle optimal suivant :

Problème de contrôle optimal

On cherche une trajectoire (x, u) avec $x = (x_1, x_2)$ dans $\mathbb{R}^2$ optimale pour le problème dont le système de contrôle dans $\mathbb{R}^2$ est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$$

Le coût est donné par :

$$J(x, u) := \int_0^\pi x_1 u$$

et les contraintes sont :

$$\begin{cases} x_1(0) = x_1(\pi) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1(\pi) = 0 \\ -1 \leq u \leq 1 \end{cases} .$$

2. Grâce au [lemme 1.4.1](#).

2.1.3 Existence de solutions

On remarque d'abord que les contraintes ne sont pas trop restrictives et qu'il existe bien des trajectoires admissibles. Ainsi si on prend $x \equiv (0, 0)$ et $u \equiv 0$, la trajectoire est admissible. Cela donne $h \equiv 1/2$ et donc avec la paramétrisation de la [théorème 1.2.2](#) on obtient le disque de diamètre 1.

En revanche, il nous faut nous assurer de l'existence d'une solution au problème de minimisation.

Proposition 2.1.1. *Il existe un corps convexe de largeur constante d'aire minimale.*

Démonstration. La preuve utilise des notions de topologie faible et topologie faible * qui sont présentées en annexe. Pour démontrer cette propriété, on va montrer que le coût

$$J(x, u) = \int_0^\pi x_1 u$$

admet un minimum sur l'ensemble des trajectoires et contrôles admissibles. Tout d'abord, soit (x, u) une trajectoire admissible (et son contrôle). Alors

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \end{pmatrix}$$

En résolvant cette équation différentielle linéaire à coefficients constants, il vient

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds$$

finalement

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t u(s) \sin(t-s) ds \\ \int_0^t u(s) \cos(t-s) ds \end{pmatrix} \text{ pour } t \in [0, \pi] \quad (*)$$

Alors (x, u) satisfait la dynamique du problème et les conditions initiales si et seulement si on a (*). On avait déjà $\|u\|_\infty \leq 1$, on déduit de (*) :

$$\|x_1\|_\infty \leq \pi, \|x_2\|_\infty \leq \pi.$$

Ceci nous permet d'écrire

$$\inf_{(x,u) \text{ admissibles}} J(x, u) \geq -\pi^2 > -\infty$$

Alors par définition de l'inf, il existe une suite $(x_k, u_k)_k$ de contrôles admissibles tels que

$$J(x_k, u_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \inf_{(x,u) \text{ admissibles}} J(x, u).$$

Par ailleurs, la suite $(u_k)_k$ est bornée dans la boule unité de $L^\infty = (L^1)'$. D'après le théorème de Banach-Alaoglu (voir [théorème A.2.1](#)), il existe, quitte à extraire une sous-suite, un contrôle $\bar{u} \in \overline{B_{L^\infty}(0, 1)}$ tel que $u_k \xrightarrow{*} \bar{u}$. C'est à dire

$$\forall v \in L^1, \langle u_k, v \rangle = \int_0^\pi u_k v \rightarrow \int_0^\pi \bar{u} v = \langle \bar{u}, v \rangle$$

Comme $|x'_1| = |x_2| \leq \pi$, par le théorème des accroissements finis, la famille $(x_k)_k$ est équilipschitzienne et bornée dans C^0 . Par le théorème d'Arzela-Ascoli, quitte à extraire une sous-suite, il existe $\bar{x} \in C^0$ tel que $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \bar{x}$ et comme travaille sur le compact $[0, \pi]$,

$$x_k \xrightarrow{\|\cdot\|_1} \bar{x}.$$

En utilisant la [propriété A.2.1](#), il vient

$$\inf_{(x,u) \text{ admissibles}} J(x, u) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(x_k, u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\pi x_{1,k} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u_k, x_{1,k} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{x}_1 \rangle = J(\bar{x}, \bar{u})$$

Pour conclure sur l'existence d'un minimiseur, il nous reste seulement à vérifier que $(\bar{x}, \bar{u})$ est une trajectoire admissible. Mais

$$x_{1,k}(t) = \int_0^t u_k(s) \sin(t-s) ds = \langle u_k, \mathbb{1}_{[0,t]} \sin(t-\cdot) \rangle$$

et $s \mapsto \mathbb{1}_{[0,t]}(s) \sin(t-s) \in L^1$ donc par convergence faible * il vient

$$x_{1,k}(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle \bar{u}, \mathbb{1}_{[0,t]} \sin(t-\cdot) \rangle$$

et par ailleurs $x_{1,k}(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{x}_1(t)$, donc finalement $\bar{x}_1(t) = \int_0^t \bar{u}(s) \sin(t-s) ds$.

On procède de même pour $\bar{x}_2$, et $(\bar{x}, \bar{u})$ est bien une trajectoire admissible. □

2.2 Résolution à l'aide du principe du maximum de Pontryagin

Le PMP s'applique à notre problème pour obtenir des conditions nécessaires sur la trajectoire optimale. Si le contrôle u est optimal, il existe un vecteur adjoint $p = (p_1, p_2) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ absolument continu, et un réel $p_0 \leq 0$ tels que le couple (p, p_0) est non trivial. Le Hamiltonien du système est alors $H(x, p, p_0, u) = \langle (p_1, p_2), (x_2, -x_1 + u) \rangle + p_0 x_1 u = p_1 x_2 - p_2 x_1 + p_2 u + p_0 x_1 u$ et on a pour presque tout $t \in [0, T]$:

$$p' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, p_0, u) \Leftrightarrow \begin{cases} p'_1 = p_2 - p_0 u \\ p'_2 = -p_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

et

$$H(x, p, p_0, u) = \max_{v \in [-1, 1]} H(x, p, p_0, v) \text{ p-p. sur } [0, T]$$

i.e.

$$\begin{aligned} p_1 x_2 - p_2 x_1 + u(p_2 + p_0 x_1) &= \max_{v \in [-1, 1]} p_1 x_2 - p_2 x_1 + v(p_2 + p_0 x_1) \\ \Leftrightarrow u(p_2 + p_0 x_1) &= \max_{v \in [-1, 1]} v(p_2 + p_0 x_1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bien sûr la dynamique donne les conditions supplémentaires

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = u - x_1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Il s'agit maintenant de traiter ces informations en différentes étapes.

Remarque. Les applications x_1 et p_2 sont de classe $C^{1,1}$. En effet, $x'_1 = x_2$ et $x'_2 = u - x_1 \in L^\infty$. Alors x_2 est lipschitzienne. On applique le même raisonnement à p_2 .

On parle d'extrémale du problème lorsque l'on considère un quadruplet (x, p, p_0, u) vérifiant les conditions nécessaires obtenues. Cette extrémale est dite anormale si $p_0 = 0$ et normale si $p_0 \neq 0$. Moralement, une trajectoire anormale est une trajectoire qui ne dépend pas du coût. On va exclure ce cas dans le cadre de notre problème dans une première étape où on montrera que $p_0 \neq 0$.

Par ailleurs, on constate également que dans le cas où le facteur $p_2 + p_0 x_1$ est nul, on ne peut déduire d'informations pertinentes sur le contrôle u . Les trajectoires correspondant aux cas où $p_2 + p_0 x_1 \equiv 0$ sont appelées trajectoires singulières, il nous faudra montrer qu'elles ne sont pas des trajectoires extrémales du système, ce qui permettra de les exclure.

Par la suite, on se placera dans le cas où $p_2 + p_0 x_1 \not\equiv 0$. Dans ce cas, en tout point où $p_2 + p_0 x_1$ ne s'annule pas, la condition de maximalité du Hamiltonien nous donnera $u \in \{\pm 1\}$ et nous accorderons une attention particulière aux points où le contrôle change de valeur, appelés *switching points*, qui sont des zéros de $p_2 + p_0 x_1$.

2.2.1 La constante p_0 est non nulle : pas de trajectoires anormales

Lemme 2.2.1. On a $p_0 \neq 0$.

Démonstration. Par l'absurde. Supposons $p_0 = 0$. Alors grâce aux conditions de (2.1), $p_2'' = -p_2$ donc

$$p_2(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$$

Puis avec (2.2), en prenant $v = 0$, on obtient

$$p_1 x_2 - p_2 x_1 + u p_2 \geq p_1 x_2 - p_2 x_1 \Leftrightarrow u p_2 \geq 0$$

Alors en particulier

$$\int_0^\pi u(t) p_2(t) dt = \int_0^\pi (x_1(t) + x_1''(t)) p_2(t) dt \geq 0$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x_1''(t) p_2(t) dt &= \int_0^\pi x_1''(t) (a \cos(t) + b \sin(t)) dt \\ &= [x_1'(t) (a \cos(t) + b \sin(t))]_0^\pi - \int_0^\pi x_1'(t) (-a \sin(t) + b \cos(t)) dt \\ &= -a(x_1'(\pi) + x_1'(0)) - \left[x_1(t) (-a \sin(t) + b \cos(t)) \right]_0^\pi + \int_0^\pi x_1(t) (a \cos(t) + b \sin(t)) dt \\ &= -a(x_1'(\pi) + x_1'(0)) + b(x_1(\pi) + x_1(0)) - \int_0^\pi x_1(t) p_2(t) dt \end{aligned}$$

Grâce aux conditions aux bords, on a finalement

$$\int_0^\pi u(t) p_2(t) dt = 0$$

Comme $u p_2 \geq 0$, on en déduit $u p_2 \equiv 0$. Mais on utilise alors la condition (2.2), qui avec $p_0 = 0$ nous indique que $u \in \{\pm 1\}$ et comme $u p_2 \geq 0$, $u = \text{signe}(p_2)$. Finalement $|p_2| = |a \cos + b \sin| = 0$ donc $a = b = 0$. Avec la condition (2.1), $p_1 = p_2 = 0$, alors le couple (p, p_0) est trivial ce qui contredit le PMP.

□

On peut pour la suite prendre $p_0 = -1$, quitte à renormaliser le vecteur adjoint p . On démontre ici une formule qui sera utile à plusieurs reprises dans les preuves qui suivront :

Lemme 2.2.2. Posons $z = p_2 - x_1$. Il existe une constante $C > 0$ vérifiant :

$$\frac{1}{2} z'^2 + \frac{1}{2} z^2 + 2|z| = C$$

Démonstration. D'abord, si on a $C \geq 0$, pour avoir $C > 0$ on considère le cas d'égalité : on a $z \equiv 0$ et $x_1 = p_2$ sur $[0, \pi]$ ce qui correspond à un cercle, qui est d'aire maximale donc ce n'est pas une solution du problème. Donc $C < 0$.

Preuve 1. On souhaite Montrer que $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2} z'^2 + \frac{1}{2} z^2 + 2|z|) = 0$ presque partout. $z \in C^{1,1}$ donc elle est dérivable et z' est encore dérivable presque partout (et absolument continue). On a pour tout t tel que $z(t) \neq 0$: $\frac{d}{dt}|z(t)| = \text{sign}(z(t)) z'(t)$. Par ailleurs en posant $\text{sign}(0) = 0$ on a encore l'égalité sur $\{t \in [0, \pi] | z(t) = z'(t) = 0\}$ avec $\frac{d}{dt}|z(t)| = \lim_{t \rightarrow t'} \frac{|z(t')| - |z(t)|}{t' - t} = \lim_{t \rightarrow t'} \frac{|z(t') - z(t)|}{t' - t} = \pm |z'(t)| = 0 = \text{sign}((z(t)) z'(t))$.

Reste à voir que l'ensemble $A = \{t \in [0, \pi] \mid z(t) = 0 \neq z'(t)\}$ est négligeable. Or il s'agit d'un ensemble de zéros isolés, car si un point $t_0 \in A$ n'est pas isolé, il existe une suite $(\alpha_n)_n$ de points de A qui converge vers t_0 et alors $z'(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(t_0) - z(\alpha_n)}{t_0 - \alpha_n} = 0$ ce qui contredit $t_0 \in A$. Donc A est au plus dénombrable.

Alors en se plaçant sur $[0, \pi] \cap A^c \cap \{t \in [0, \pi] \mid z''(t) \text{ existe}\}$ on a bien presque partout :

$$\frac{d}{dt}|z| = \text{sign}(z)z'$$

Et comme quand $z(t) = 0$, $u(t) \in [-1, 1]$ et $u(t) = \text{sign}(z(t))$ sinon, on a bien presque partout :

$$u(t)z(t) = \text{sign}(z(t))z(t) = |z(t)|, \quad u(t)z'(t) = \text{sign}(z(t))z'(t) = \frac{d}{dt}|z|$$

Finalement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}z'^2 + \frac{1}{2}z^2 + 2|z|\right) = z'z'' + zz' + 2uz' = z'(z'' + z + 2u) = 0$$

alors puisque $\frac{1}{2}z'^2 + \frac{1}{2}z^2 + 2|z|$ est une application absolument continue de dérivée nulle, elle est constante.

Preuve 2. En utilisant le fait que le système est autonome, donc le Hamiltonien est constant le long des trajectoires optimales. On a donc :

$$H(x, p, p_0, v) = p_1x_2 - p_2x_1 + u(p_2 - x_1) = p_1x_2 - p_2x_1 + |z| = c \text{ où } c \text{ est une constante.}$$

Par ailleurs, on développe notre expression :

$$\frac{1}{2}z'^2 + \frac{1}{2}z^2 + 2|z| = 2H(x, p, p_0, v) + \frac{1}{2}(p_2^2 + p_1^2 + x_1^2 + x_2^2) - p_1x_2 + p_2x_1$$

Les dérivées $x'_{1,2}$ et $p'_{1,2}$ existent, alors on va montrer que $f = \frac{1}{2}(p_2^2 + p_1^2 + x_1^2 + x_2^2) - p_1x_2 + p_2x_1$ est constante :

$$f' = 2(p_1p'_1 + p_2p'_2 + x_1x'_1 + x_2x'_2 - p'_1x_2 + p_1x'_2 + p'_2x_1 + p_2x'_1)$$

en remplaçant les dérivées par leur expression données par (2.3) et (2.1) on obtient finalement

$$f' = 0 \text{ presque partout sur } [0, \pi]$$

donc f est constante et on a le résultat. $\square$

2.2.2 Les trajectoires extrémales du système ne comportent pas d'arc singulier

Comme on a renormalisé, un arc singulier correspond désormais à un ouvert de $[0, \pi]$ au cas $p_2 - x_1 \equiv 0$.

Lemme 2.2.3. *Les trajectoires comportant des arcs singuliers, c'est à dire vérifiant $p_2 - x_1 \equiv 0$ sur un ouvert non vide de $[0, \pi]$ ne sont pas des trajectoires extrémales du système.*

Démonstration. Avec le lemme 2.2.2, si une trajectoire comporte un arc singulier, alors $C = 0$ donc $x_1 - p_2 \equiv 0$ sur $[0, \pi]$. Dans le cas d'une trajectoire singulière, $x_1 = p_2$. Soit $y := p_2 + x_1$. Sur $[0, \pi]$ les conditions (2.3) et (2.1) donnent

$$y'' + y = 0.$$

Donc finalement comme x_1 et p_2 sont de classe $C^{1,1}$ il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $y = p_2 + x_1 = a \cos + b \sin$ d'où

$$x_1(t) = -p_2(t) + a \cos(t) + b \sin(t)$$

et donc avec l'hypothèse

$$x_1(t) = \frac{a}{2} \cos(t) + \frac{b}{2} \sin(t)$$

Alors $x''_1 + x_1 = 0$ et avec (2.3) il vient $u = 0$ donc d'après la remarque déjà faite en 2.1.3 qu'il s'agit du disque, qui maximise l'aire parmi les corps de largeur constante (voir corollaire 1.4.1). Ce n'est donc pas la solution cherchée. $\square$

Finalement on déduit de l'hypothèse de maximisation (2.2) qui est linéaire en v :

$$\begin{cases} p_2(t) - x_1(t) > 0 & \Rightarrow u(t) = +1 \\ p_2(t) - x_1(t) < 0 & \Rightarrow u(t) = -1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Les points où $p_2(t) - x_1(t) = 0$ sont les switching points où le contrôle est susceptible de changer de valeur.

2.2.3 Il y a un nombre fini de switching points dans $[0, \pi]$

Lemme 2.2.4. *Il y a un nombre fini de switching points dans l'intervalle $[0, \pi]$.*

Démonstration. Ce résultat s'obtient par l'absurde. Supposons qu'il existe une infinité de switching points dans $[0, \pi]$. En particulier ce sont des zéros de la fonction de commutation z . Avec le [lemme 2.2.2](#) on a pour tout $t \in [0, \pi]$:

$$\frac{1}{2}z'(t)^2 + \frac{1}{2}z(t)^2 + 2|z(t)| = C \quad (2.5)$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante fixée. On sait que cette constante est strictement positive car alors on aurait $z \equiv 0$ et on a vu précédemment que la trajectoire associée est un cercle, qui n'est donc pas solution de notre problème.

On peut construire une suite de switching points et par compacité en extraire une sous suite convergente : soit $(\alpha_n)_n$ une suite de switching points convergente vers $\alpha \in [0, \pi]$. Chaque valeur de la suite annule z qui est continue, donc $z(\alpha) = 0$. Par ailleurs $z'(\alpha)$ existe et coïncide avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(\alpha_n) - z(\alpha)}{\alpha_n - \alpha} = 0$ donc finalement en évaluant 2.5 en α on a $C = 0$, d'où contradiction. $\square$

2.2.4 Les switching points sont équidistants

Lemme 2.2.5. *Notons $0 < \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p < \pi$ les switching points, en supposant $p \geq 3$. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, p-1\}$*

$$\tau_{i+1} - \tau_i = c$$

Démonstration. On se place en premier lieu sur $[\tau_1, \tau_2] \cup [\tau_2, \tau_3]$. Supposons que $z > 0$ sur $[\tau_1, \tau_2]$ et $z < 0$ sur $[\tau_2, \tau_3]$. Alors la fonction de commutation vérifie

$$\begin{cases} z'' + z = -2 & \text{sur } [\tau_1, \tau_2] \\ z'' + z = 2 & \text{sur } [\tau_2, \tau_3] \end{cases}.$$

Il existe des constantes ρ_1, ρ_2 et α_1, α_2 telles que

$$\begin{cases} z(t) = \rho_1 \cos(t - \alpha_1) - 2 & \text{sur } [\tau_1, \tau_2] \\ z(t) = \rho_2 \cos(t - \alpha_2) + 2 & \text{sur } [\tau_2, \tau_3] \end{cases}.$$

De plus, quitte à ajuster α_1, α_2 on peut choisir $\rho_1, \rho_2 \geq 0$. Avec les conditions de régularité de z en τ_2 et la condition $z(\tau_1) = z(\tau_2) = z(\tau_3) = 0$ il vient

$$\begin{cases} \rho_1 \cos(\tau_2 - \alpha_1) = 2 \\ \rho_2 \cos(\tau_2 - \alpha_2) = -2 \\ -\rho_1 \sin(\tau_2 - \alpha_1) = -\rho_2 \sin(\tau_2 - \alpha_2) \end{cases}$$

Alors on remarque en manipulant ces équations que $\rho_1^2 = \rho_2^2$ i.e. $\rho_1 = \rho_2$ et également

$$\tan(\tau_2 - \alpha_1) = -\tan(\tau_2 - \alpha_2)$$

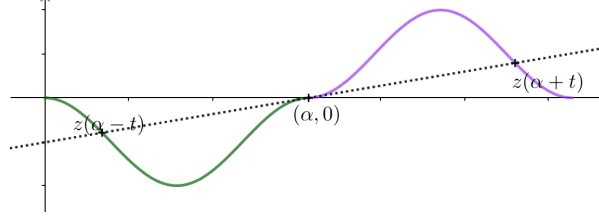
donc il vient $\tau_2 - \alpha_2 = -(\tau_2 - \alpha_1) + \pi$ puis $\alpha_2 = 2\tau_2 - \alpha_1 - \pi$ et finalement

$$\begin{cases} z(t) = \rho \cos(t - \alpha_1) - 2 & \text{sur } [\tau_1, \tau_2] \\ z(t) = -\rho \cos(t - 2\tau_2 + \alpha_1) + 2 & \text{sur } [\tau_2, \tau_3] \end{cases}$$

Par le changement de variable $s = t - \alpha_1$ et en posant $\alpha = \tau_2 - \alpha_1$ on a

$$\begin{cases} z(t) = \rho \cos(s) - 2 & \text{sur } [\tau_1 - \alpha_1, \alpha] \\ z(t) = -\rho \cos(2\alpha - s) + 2 = -z(2\alpha - t) & \text{sur } [\alpha, \tau_3 - \alpha_1] \end{cases}$$

On remarque alors une symétrie centrale de centre $(\alpha, 0)$.



Finalement, on a donc bien $\tau_3 - \alpha_1 - \alpha = \alpha - \tau_1 - \alpha_1$ i.e. $\tau_3 - \tau_2 = \tau_2 - \tau_1$. Il suffit alors de procéder de même sur tous les intervalles $[\tau_i, \tau_{i+1}] \cup [\tau_{i+1}, \tau_{i+2}]$ pour $i \in \{1, \dots, p-2\}$. $\square$

Par ailleurs, on étudie à présent la situation où il y a moins de 3 switching points dans $[0, \pi]$.

Lemme 2.2.6. 1. Si il y a exactement deux switching points dans $[0, \pi]$, le minimiseur est le triangle de Reuleaux.

2. Il est impossible qu'il y aie moins de deux switching points dans $[0, \pi]$.

Démonstration. 1. En supposant qu'il y a deux switching points $\tau_1 < \tau_2$ dans $[0, \pi]$, on résout le système différentiel du problème. En tenant en compte les conditions de régularité C^1 aux switching points ainsi que les conditions initiales il vient, si on note $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ la valeur du contrôle sur $[0, \tau_1]$:

$$\begin{cases} x_1(t) = \varepsilon - \varepsilon \cos(t), t \in [0, \tau_1] \\ x_1(t) = -\varepsilon - \varepsilon \cos(t) + 2\varepsilon \cos(t - \tau_1), t \in [\tau_1, \tau_2] \\ x_1(t) = \varepsilon - \varepsilon \cos(t) + 2\varepsilon \cos(t - \tau_1) - 2\varepsilon \cos(t - \tau_2), t \in [\tau_2, \pi] \end{cases}$$

En particulier, avec $x_1(\pi) = x_2(\pi) = 0$ on a les conditions

$$\begin{cases} 1 - \cos(\tau_1) + \cos(\tau_2) = 0 \\ \sin(\tau_1) = \sin(\tau_2) \end{cases}$$

En utilisant $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq \pi$ il vient $\tau_1 = \frac{\pi}{3}$ et $\tau_2 = \frac{2\pi}{3}$. Il s'agit donc du triangle de Reuleaux.

2. S'il existe un unique switching point τ_1 dans $[0, \pi]$, alors en procédant comme au point précédent il vient

$$x_1(t) = -\varepsilon - \varepsilon \cos(t) + 2\varepsilon \cos(t - \tau_1), t \in [\tau_1, \pi].$$

Comme $x_1(\pi) = x_2(\pi) = 0$, on a $\cos(\tau_1) = \sin(\tau_1) = 0$ ce qui est impossible. Si il n'y a aucun switching point dans $[0, \pi]$, alors

$$\forall t \in [0, \pi], x_1(t) = \varepsilon - \varepsilon \cos(t)$$

et avec $x_1(\pi) = 0 = 2\varepsilon$ on a une contradiction. $\square$

2.2.5 Identification du minimiseur : le triangle de Reuleaux.

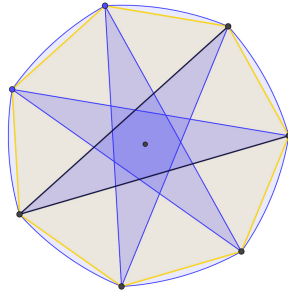
Ce dernier lemme nous permet de déduire que le minimiseur est un polygone de Reuleaux impair. En effet, les switchings points étant équidistants, et le contrôle u passant de -1 à 1, c'est à dire que le rayon de courbure passe de 0 à 1, notre corps convexe est une réunion de portions de disques de rayon 1. On rappelle le théorème de Blaschke-Lebesgue.

Théorème 2.2.1. Théorème de Blaschke-Lebesgue. Parmi tous les corps convexes du plan de largeur constante donnée l , celui d'aire minimale est le triangle de Reuleaux.

Pour achever la preuve de ce théorème, il suffit de démontrer que l'aire des polygones impairs de Reuleaux est croissante en fonction du nombre de côtés.

Calcul géométrique de l'aire d'un polygone de Reuleaux impair. Dans ce paragraphe, on calcule géométriquement l'aire d'un polygone de Reuleaux ayant un nombre de côté impair. Cette démonstration peut également être faite à l'aide de série de Fourier. Ici, seuls des outils élémentaires sont nécessaires. On le fera dans le cadre de largeur constante valant 1.

On considère un polygone de Reuleaux impair à $n \geq 3$ côté d'aire totale $\mathcal{A}(n)$. On sépare l'aire à déterminer en deux parties, l'aire du polygone régulier initial, et celle des segments de disque qui le complètent.



Proposition 2.2.1. L'aire d'un polygone de Reuleaux de largeur 1 à $n \geq 3$ côtés, n impair, est

$$\mathcal{A}(n) = \frac{\pi}{2} - \frac{n}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

Démonstration. On considère ici un secteur de disque. Pour déterminer son angle, on applique le théorème de l'angle au centre au cercle circonscrit au polygone (voir figure ci-dessous), il vient qu'il s'agit d'un secteur de disque de rayon 1 (égale à la largeur de notre corps convexe) et d'angle $\frac{\pi}{n}$, donc d'aire $\frac{\pi}{2n}$.

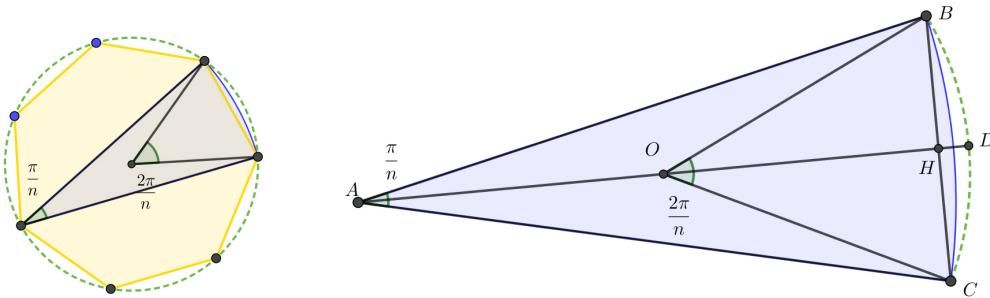


FIGURE 2.1 – A gauche : application du Théorème de l'angle au centre au cercle circonscrit (en vert). A droite : Secteur de cercle de rayon 1 (en bleu), où O est le centre du cercle circonscrit (barycentre des sommets du polygone), et où on a ajouté en vert l'arc de cercle circonscrit. On a construit H comme projeté de O sur $[BC]$.

Il faut ensuite déduire quelques longueurs, en se plaçant sur un secteur qui compose le polygone de Reuleaux.

Le Théorème d'Al-Kashi appliqué au triangle ABC donne $BC^2 = 2 - 2\cos(\frac{\pi}{n})$ d'où

$$BC = \sqrt{2 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}.$$

En appliquant un argument de trigonométrie au triangle rectangle OBH il vient

$$OH = \frac{\sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}}{\sqrt{2} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Ce qui permet de déduire l'aire A_T du triangle OBC :

$$A_T = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Il reste à déterminer l'aire A_C de la section de cercle que l'on a ajouté pour « arrondir » le polygone, et qui vaut $\frac{\pi}{2n} - \text{Aire}(ABC)$. Pour déterminer cette aire, on calcule sa hauteur AH . Comme $AB = AC$ et $OB = OC$ on a A, O, H alignés car sur la médiatrice de $[BC]$ et on a donc avec le théorème de Pythagore $AH^2 + BH^2 = 1$, d'où

$$AH = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}}$$

$$\text{et finalement } A_C = \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2}} \sqrt{2 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} = \frac{\pi}{2n} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2} \text{ car } \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 0.$$

Donc l'aire du polygone de Reuleaux est

$$\mathcal{A}_n = \frac{n}{2} \left(\frac{\pi}{n} - \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{n}{2} \left(\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right)$$

Avec ce qui précède et en observant que $\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on a le résultat. $\square$

Corollaire 2.2.1. *L'aire des polygones de Reuleaux impairs pour une largeur fixée est croissante selon le nombre de côtés.*

Démonstration. On dérive simplement pour $x \geq 3$: $f(x) := \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \left(\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} \right)$ et il vient $f'(x) =$

$$\frac{-x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + \pi}{2x \left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + 1 \right)} \text{ qui est positif si et seulement si } \frac{\pi}{x} \geq \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \text{ ce qui est vérifié car } \sin(x) \leq x \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Le corps convexe de largeur constante 1 d'aire minimale est donc le triangle de Reuleaux d'aire $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$, ce qui conclut la preuve du théorème de Blaschke-Lebesgue. $\square$

3 | Généralisation à $\mathbb{R}^3$, conjecture de Meissner et questions liées

Après avoir introduit les outils nécessaires dans la première partie, on a vu dans la seconde partie une preuve du théorème de Blaschke-Lebesgue à l'aide des outils relativement contemporains du contrôle optimal. Toutefois, ce théorème avait déjà été prouvé avec d'autres outils (calcul des variations) au début du XXe siècle, contrairement à de nombreuses questions encore ouvertes ou résolues récemment liées aux corps convexes de largeur constante et aux solides d'épaisseur constante de $\mathbb{R}^3$. En guise de conclusion, on présente dans cette partie plusieurs de ces questions connexes.

3.1 Corps d'épaisseur constante de volume minimal

Une fois démontré le théorème de Blaschke-Lebesgue en dimension 2, il semble naturel de généraliser aux volumes d'épaisseur constante et de soulever des questions similaires. La fonction d'appui reste un outil fondamental en dimension supérieure et on définit un corps d'épaisseur constante par le même type de relation : C est un corps convexe d'épaisseur constante l de $\mathbb{R}^3$ si sa fonction d'appui h vérifie :

$$\forall u \in \mathbb{S}^2, h(u) + h(-u) = l.$$

La question du corps convexe de largeur constante de volume minimal de $\mathbb{R}^3$ est soulevée depuis le début du XXe siècle. Un candidat naturel est le tétraèdre de Reuleaux, équivalent tridimensionnel du triangle de Reuleaux obtenu par une réunion de portions de sphères. Toutefois, il ne s'agit pas d'un solide de largeur constante. E. Meissner en présente donc dans les années 1910 une version modifiée, connue sous le nom de « solide de Meissner » ou « sphérophorme de Meissner », et conjecturé depuis les années 1930 comme étant le minimiseur du volume dans la classe des corps convexes de largeur constante de $\mathbb{R}^3$. Il est obtenu à partir d'un tétraèdre de Reuleaux par intersection avec la famille des boules centrées sur trois arêtes données et ayant pour rayon la largeur du solide. Plus précisément, si T est un tétraèdre de Reuleaux d'« épaisseur » l et E la réunion de trois de ces arêtes issues d'un même sommet, le solide de Meissner est défini par

$$C = T \cap \left(\bigcap_{x \in E} \overline{B}(x, l) \right).$$



FIGURE 3.1 – Solide de Meissner. Image reproduite depuis [16].

Le théorème suivant, dû à Blaschke, relie l'aire surfacique et le volume d'un corps convexe de largeur constante et permet de passer d'un problème de minimisation du volume à un problème de minimisation de surface équivalent.

Théorème 3.1.1. Théorème de Blaschke (1915). *Si C est un corps convexe d'épaisseur constante l , il vérifie*

$$\text{Vol}(C) = \text{Aire}(\partial C) \frac{l}{2} - \frac{\pi}{3} l^3.$$

Si ce problème de minimisation reste ouvert, des conditions nécessaires ont été établies durant les dernières décennies, toutes satisfaites par le solide de Meissner. En voici deux.

Proposition 3.1.1. *Soit C le corps convexe d'épaisseur constante l de volume minimal.*

1. *Le volume de C est minoré par $\pi \frac{3\sqrt{6} - 7}{3} \simeq 0,365$.*
2. *C n'est pas de frontière lisse, il admet des « arrêtes curvilignes ».*

3.2 Rotors

La condition de largeur constante implique qu'inscrit dans un carré de côté l , un corps convexe de largeur constante l touche les 4 côtés du carré à chaque instant si on le tourne. Cette condition se généralise à un polygone régulier à n côtés, ce qui amène à considérer d'autres classes d'objets, les rotors.

Définition 3.2.1. *Un rotor est un corps convexe qui tourne à l'intérieur d'un polygone régulier convexe à n côtés $\mathcal{P}_n$, en restant à chaque instant en contact avec les n côtés de $\mathcal{P}_n$.*

Pour $n = 4$, on retrouve les corps convexes de largeur constante. La condition précédente se traduit comme suit en terme de fonction d'appui : soit $r > 0$ le rayon du cercle inscrit à $\mathcal{P}_n$ et $d = \frac{2\pi}{n}$. Soit C un corps strictement convexe de fonction d'appui paramétrée h , C est un rotor si et seulement si $h \in C^{1,1}$ et

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad h(\theta) - 2 \cos(d) h(\theta + d) + h(\theta + 2d) = 4r \sin^2 \left(\frac{d}{2} \right).$$

Une bonne paramétrisation du problème permet d'obtenir des contraintes sur la fonction d'appui paramétrée sous la forme d'une série de Fourier, et il vient

$$h(\theta) = r + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(c_{ln-1} e^{i(ln-1)\theta} + c_{ln+1} e^{i(ln+1)\theta} \right) \quad (3.1)$$

Le théorème de Barbier ([théorème 1.4.1](#)) reste valide dans le cas des rotors. Concernant l'aire, on peut soulever la question du rotor d'aire minimale pour un n donné. Le cas $n = 3$ a été étudié géométriquement par M. Fujiwara et le cas $n = 4$ correspond au Théorème de Blaschke-Lebesgue. Pour $n \geq 5$, M. Goldberg introduit en 1957 les « rotors réguliers », généralisant les polygones de Reuleaux. Comme pour les corps convexes de largeur constante, il conjecture que le rotor d'aire minimale est celui réunissant un minimum d'arcs de cercle. Le problème a été résolu par les techniques du contrôle optimal par T. Bayen en 2008. La principale différence avec la preuve exposée en partie II réside dans le remplacement de la condition de largeur constante $h(\theta) + h(\theta + \pi) = l$ par les conditions (3.1) qui aboutissent à un travail sur un contrôle u à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Il vient ensuite que qu'un rotor d'aire minimale est une réunion d'un nombre fini d'arcs de cercles de mêmes secteurs angulaires, ce qui permet de conclure.

3.3 Courbes implicites polynômiales de largeur constante

A partir de la paramétrisation donnée en [théorème 1.2.2](#), que l'on rappelle :

$$\begin{cases} x(\theta) &= h(\theta) \cos(\theta) - h'(\theta) \sin(\theta) \\ y(\theta) &= h(\theta) \sin(\theta) + h'(\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

on peut soulever la question de l'obtention d'une courbe implicite, et en particulier des courbes implicites polynômiales de largeur constante. Une de ces courbes, évidente, est donnée par le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$, et on remarque en particulier qu'elle est définie par un polynôme de degré 2.

Dans un article de 1997 [15], S. Rabinowitz exhibe une courbe de largeur constante polynomiale et non circulaire, définie par un polynôme de degré 8, et s'interroge sur le degré minimal d'une courbe de largeur constante polynomiale et non circulaire : peut-on en trouver une de degré inférieur à 8 ?

Le polynôme proposé par Rabinowitz est obtenu en implicitant la courbe donnée par la fonction d'appui

$$h(\theta) = 2 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + 8$$

qui vérifie bien les conditions nécessaires pour être la fonction d'appui d'un corps convexe de largeur constante. Il vient alors

$$\begin{cases} x(\theta) &= 9 \cos(\theta) + 2 \cos(2\theta) - \cos(4\theta) = -3 + 9c + 12c^2 - 8c^4 \\ y(\theta) &= 9 \sin(\theta) - 2 \sin(2\theta) - \sin(4\theta) = s(9 - 4c - 4c^3 + 4cs^2) \end{cases}$$

En mettant au carré la deuxième équation et en substituant $s^2 = 1 - c^2$, on obtient deux polynômes en x, y, c . On cherche à éliminer c à l'aide d'un résultant, à l'aide d'un logiciel de calcul formel il vient

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x^2 + y^2)^4 - 45(x^2 + y^2)^3 - 41283(x^2 + y^2)^2 + 7950960(x^2 + y^2) + 16(x^2 - 3 \cdot y^2)^3 \\ &+ 48(x^2 + y^2)(x^2 - 3 \cdot y^2)^2 + [(16(x^2 + y^2)^2 - 5544(x^2 + y^2) + 266382)(x^2 - 3 \cdot y^2) \cdot x] - 373248000. \end{aligned}$$

Par conséquent, $f(x, y) = 0$ définit une courbe de largeur constante du plan, donnée par un polynôme de degré 8.

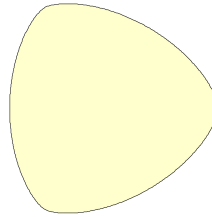


FIGURE 3.2 – Corps de largeur constante du plan défini par $C : f(x, y) = 0$.

Dans un article de 2013, T. Bayen et M. Bardet résolvent la question de degré minimal soulevée par S. Rabinowitz. Pour ce faire, ils établissent une relation entre le degré de h comme polynôme trigonométrique et celui du polynôme définissant la courbe implicite. En appliquant cette relation au cas des courbes de largeur constante non circulaires, ils démontrent que le degré obtenu pour le polynôme est de la forme $4N + 4$ où $N \geq 1$ et déduisent ainsi qu'il n'existe pas de tel polynôme de degré inférieur à 8.

A | Annexes

A.1 Absolue continuité

Cette section théorique introduit une notion clé qui est intervenue tout au long de ce mémoire : l'absolue continuité. Ce résumé des principaux résultats utilisés ici est essentiellement issu de [10].

Définition A.1.1. Une fonction définie sur un segment $I = [a, b]$ est dite absolument continue (« AC ») sur I si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, et toute famille d'intervalles disjoints $]a_1, b_1[, \dots,]a_n, b_n[$ contenus dans I tels que

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$$

on ait

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

Lemme A.1.1. Toute fonction lipschitzienne est absolument continue.

Démonstration. Soit f une fonction lipschitzienne sur $[a, b]$, avec $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$. Alors pour $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ il vient pour $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq C \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \varepsilon$$

□

Théorème A.1.1. Définie sur $I = [a, b]$, une fonction AC est différentiable presque partout sur I , $f' \in L^1$ et

$$\forall x \in [a, b], f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$$

Ce théorème ne sera pas démontré ici. Une preuve technique est proposée dans [10].

Lemme A.1.2. Soient f, g deux applications AC sur $[a, b]$. Alors le produit fg est absolument continu et pour tout $[x, y] \subset [a, b]$ on a

$$\int_x^y f'g = [fg]_x^y - \int_x^y fg'$$

Démonstration. Tout d'abord, on remarque

$$f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i) = (f(b_i) - f(a_i))g(a_i) + f(b_i)(g(b_i) - g(a_i))$$

Comme f, g sont AC sur $[a, b]$, elles sont continues et il existe des constantes M_f, M_g telles que $|f| \leq M_f$ et $|g| \leq M_g$. Finalement

$$|fg(b_i) - fg(a_i)| \leq M_g |f(b_i) - f(a_i)| + M_f |g(b_i) - g(a_i)|$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2M_g}$$

et il existe δ_1 tel que

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n |g(b_i) - g(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2M_f}$$

Alors en prenant $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$ on a le résultat et fg est absolument continue. Il en découle pour tout $[x, y] \subset [a, b]$

$$fg(y) - fg(x) = \int_x^y (fg)' = \int_x^y (f'g + fg') = \int_x^y f'g + \int_x^y fg'$$

d'où le résultat. □

A.2 Topologies faible et faible *

Dans cette section essentiellement basée sur [14], on présente les topologies faible et faible * d'un espace de Banach, nécessaires pour démontrer l'existence d'un minimiseur dans la deuxième partie de ce travail.

Construction d'une topologie minimale. A partir d'une collection $\{U_i\}_i$ donnée de sous ensembles d'un ensemble E , on souhaite construire la « plus petite » topologie dont ce sont des ouverts (c'est à dire contenant le moins d'ouverts possibles). Cette topologie s'obtient en prenant les intersections finies d'éléments de $\{U_i\}_i$, puis les unions dénombrables de ces intersections.

Si on considère une famille d'applications $(\varphi_i)_{i \in I}$, où $\varphi_i : E \rightarrow F_i$ avec F_i un espace topologique, la plus petite topologie rendant continue ces applications est donnée par le même procédé en prenant comme collection d'ouverts $\{\varphi_i^{-1}(V) | i \in I, V \text{ ouvert de } F_i\}$.

Dans la suite, on note E un espace vectoriel de Banach muni d'une norme notée $\|\cdot\|$, et E' son dual topologique, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires continues sur E . On munit E' de la norme opérateur $\|\cdot\|'$ et de la topologie associée.

Définition A.2.1. Topologie faible. La topologie faible sur E , notée $\sigma(E, E')$ est la plus petite topologie sur E rendant continus tous les éléments de E' , c'est à dire préservant le dual topologique de E . On dira qu'une suite $(x_n)_n$ de E converge faiblement vers $x \in E$, et on notera $x_n \rightharpoonup x$, si cette convergence a lieu pour la topologie faible.

En particulier, on a

$$[x_n \rightharpoonup x] \Leftrightarrow [\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall f \in E']$$

Pour faciliter la distinction, on parlera de « convergence forte » lorsqu'elle a lieu pour la topologie issue de $\|\cdot\|$.

On introduit ensuite une topologie sur l'espace dual E' , la topologie faible *. Notons E'' le bidual de E , et pour $x \in E$, $\varphi_x \in E''$ définie par $f \mapsto \varphi_x(f) = f(x)$.

Définition A.2.2. Topologie faible *. La topologie faible * est la topologie la moins fine sur E' rendant continues les applications $\{\varphi_x\}_{x \in E}$. On dira qu'une suite $(f_n)_n$ de E' converge faiblement * vers $f \in E'$, et on notera $f_n \xrightarrow{*} f$, si cette convergence a lieu pour la topologie faible *.

On a en particulier

$$\phi_n \xrightarrow{*} \phi \Leftrightarrow \forall x \in E, \langle \phi_n, x \rangle \rightarrow \langle \phi, x \rangle$$

Il vient la propriété suivante :

Proposition A.2.1. Soient $(\phi_n)_n$ une suite de E' qui converge faiblement * vers ϕ et $(x_n)_n$ une suite de E qui converge fortement vers x . Alors

$$\langle \phi_n, x_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \phi, x \rangle$$

Enfin, le résultat suivant est la clef de la preuve de l'existence d'un minimiseur de l'aire dans la classe des corps convexes de largeur constante.

Théorème A.2.1. Théorème de Banach-Alaoglu. Soit E un espace de Banach, alors la boule unité de E' est faiblement * compacte, c'est à dire, pour toute suite bornée de E' il existe une sous suite qui converge pour la topologie faible *.

On a finalement compactifié la boule unité d'un espace vectoriel de dimension a priori infinie, en changeant la topologie pour la rendre moins fine.

Bibliographie

- [1] BAYEN, T., *Optimisation de formes dans la classe des corps de largeur constante et des rotors*.
Thèse de doctorat de l'université Paris VI, (2007)
<http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/21/20/70/PDF/Bayen1.pdf>.
- [2] BAYEN, T., HIRIART-URRUTY, J.B., *Objets convexes de largeur constante (en 2D) ou d'épaisseur constante (en 3D) : du neuf avec du vieux*.
Ann. Sci. Math. Quebec 36, 1, pp. 17-42, 2012
<http://www.math.univ-montp2.fr/~bayen/articles/paper2009.pdf>.
- [3] ROCKAFELLAR, R.T., *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1972, Chapitres 1,2,12,13,23,25.
- [4] LETAC, G., *Mesures sur le cercle et convexes du plan*, Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 76, 1983, p.35-65. Disponible en ligne :
http://www.numdam.org/article/ASCFPA_1983__76_1_35_0.pdf
- [5] BARDET, M., BAYEN, T., *On the degree of the polynomial defining a planar algebraic curves of constant width*, 2018, arXiv :1312.4358 [math.AG], disponible en ligne <https://arxiv.org/pdf/1312.4358.pdf>
- [6] BONNESEN, T., FENCHEL, W., *Theory of convex bodies*, BCS Associates, 1987.
- [7] HIRIART-URRUTY, J.B., *Optimisation et analyse convexe*, EDP Sciences, 2009, Chapitre VII.
- [8] MERIGOT, Q., Notes de cours « Analyse convexe approfondie », Université Paris-Dauphine, 2014-2016, en ligne.
<http://quentin.mrgt.fr/files/teaching/aca-2016/chap2.pdf>
- [9] TRELAT, E., *Contrôle optimal - Théorie & applications*, Vuibert, 2005.
- [10] RUDIN, W., *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 3e édition, 2009.
- [11] AUDIN, M., *Géométrie*, EDP Sciences, 2009, Chapitre VIII *Courbes, Enveloppes et développées*
- [12] FRESLON, A., *Courbes et Surfaces*, Notes de cours de l'université Paris Sud XI, en ligne.
https://www.math.u-psud.fr/~freslon/Documents/MATH213/Cours_2016.pdf
- [13] BANCHOFF, T., LOVETT, S., *Differential geometry of curves and surfaces*, AK PETERS, 2010.
- [14] BREZIS, H., *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 2005.
- [15] RABINOWITZ, S., *A Polynomial Curve of Constant Width*, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 9(1997)23-27. Disponible en ligne. <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.694.1280&rep=rep1&type=pdf>
- [16] KAWOHL, B., WEBER, C. (2011), *Meissner's Mysterious Bodies*, The Mathematical Intelligencer, 33, 94-101 10.1007/s00283-011-9239-y.